מתרגל מיכאל טויטו

דוא"ל DexlessDK@gmail.com

שעות קבלה בתאום במייל

- תרגילי בית במתכונת שבועית(בקירוב)
- אתר הקורס בwww.math-wiki.com
- יהיה בוחן

שדות סקלריים ווקטורים

הגדרה - שדה סקלרי

עבור תחום $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$(בד"כ $n = 2, 3$), שדה סקלרי הוא פונקציה $f : \underset{\text{dot}\mapsto\text{scalar}}{\Omega \to \mathbb{R}}$

למשל:
$$f\,)x, y(= x^2 + y^2$$
$$f\,)x, y, z(= e^{x^2} \cdot y - z$$

הגדרה - שדה וקטורי

שדה וקטורי הוא פונקציה $F : \underset{\text{dot}\mapsto\text{vector}}{\Omega \to \mathbb{R}^n}$

- ב$\mathbb{R}^3$ נכתוב

$$F(x, y, z) = F(\vec{r}) = (F_1(\vec{r}), F_2(\vec{r}), F_3(\vec{r}))$$

- ב$\mathbb{R}^2$ נכתוב

$$F(x, y) = F(\vec{r}) = (F_1(\vec{r}), F_2(\vec{r})) = F_1 \cdot \hat{\imath} + F_2 \cdot \hat{\jmath}$$

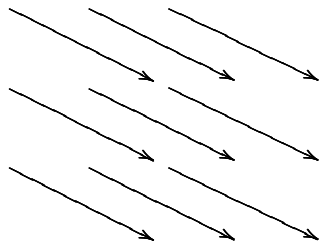
כאשר $\hat{\imath} = (1, 0)$ ו$\hat{\jmath} = (0, 1)$

שרטוט

כיצד משרטטים שדה וקטורי נתון?
תשובה: מציבים נקודות שונות עד לקבלת תמונה כללית.

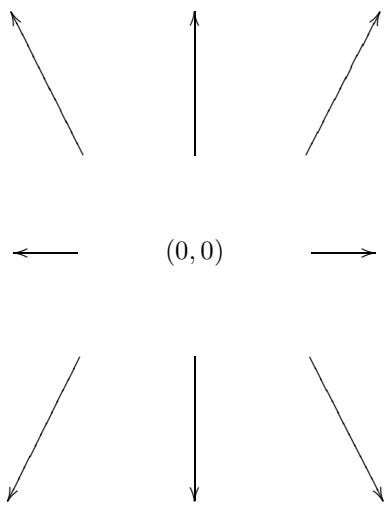
דוגמאות

1. $F(x,y) = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} = (2,-1)$ (שדה וקטורי קבוע)



2. $F(x,y) = x\hat{\imath} = (x,0)$

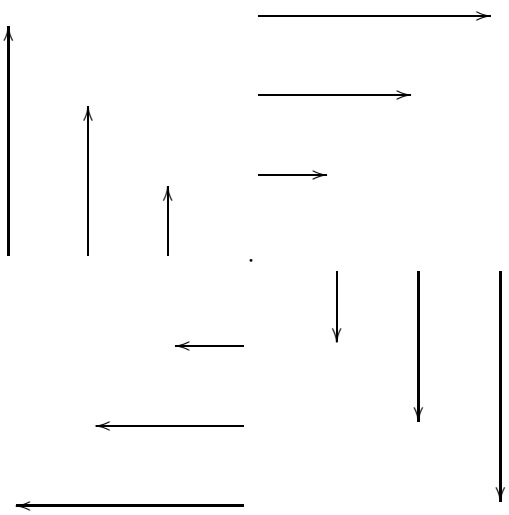
3. $F(x,y) = x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$



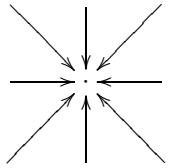
4. $F(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$. נשים לב שמתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ - זוהי מטריצת סיבוב ב$-90°$

כזכור: מטריצת הסיבוב בזוית α נגד כיוון השעון היא $R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

לכן, השדה הוקטורי הזה הוא:

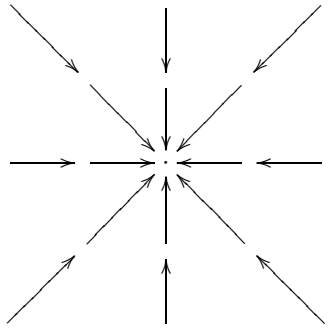


ננסה להגיע משרטוט את השדה הוקטורי



זהו השדה הווקטורי $F(x,y) = (-x,-y)$, או $F(\vec{r}) = -\vec{r}$

דוגמה אחרת:



זהו השדה הווקטורי $F(\vec{r}) = -\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

אופרטורים דיפרנציאליים

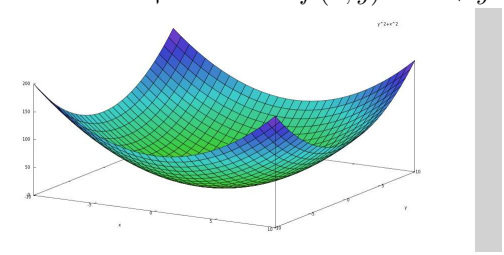
הסימון ∇ "נבלה" מייצג את האופרטור "דל" ב$\mathbb{R}^n$.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

עבור שדה סקלרי(דיפרנציאבילי) f, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ יקרא הגרדיאנט של f.
גרדיאנט הופך <u>שדה סקלרי</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ל<u>שדה וקטורי</u> $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

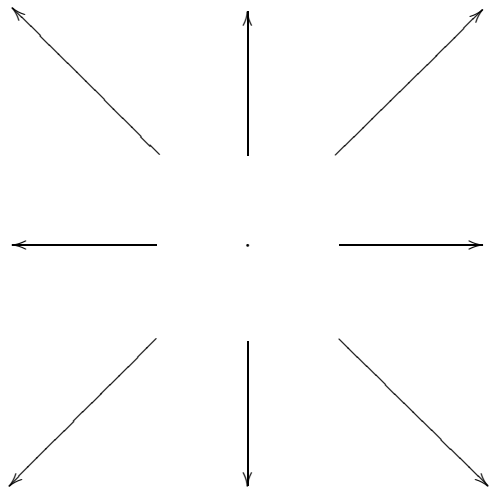
דוגמאות

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$. זהו שדה סקלרי - נצייר אותו ב$\mathbb{R}^3$:



$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, 2y) = \big(2x, 2y\big)$$

זהו שדה סקלרי - נצייר אותו ב$\mathbb{R}^2$:



תזכורת

בכל נקודה, ∇f מצביע בכיוון ההשתנות הגבוע ביותר בפונקציה f ו$\|\nabla f\|$ הוא קצב ההשתנות הזו. ∇f מאונך תמיד למשטיח עקומות רמה של f(שבהם $f = c$ כאשר c קבוע)

הגדרה

שדה ווקטורי $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נקרא <u>שדה פוטנציאלי</u> אם קיים שדה סקלרי f כך ש$F = \nabla f$. f שכזו נקראת "<u>הפוטנציאל</u>" של F.

דוגמה: $x^2 + y^2$ היא הפוטנציאל של $(2x, 2y)$

הגדרה

דיבגרנץ של שדה וקטורי F הוא שדה סקלרי $\mathrm{div}F$ המוגדר על ידי

$$\mathrm{div}F = \nabla \cdot F = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ... \frac{\partial}{\partial x_n}\right)}_{\nabla} \cdot \underbrace{(F_1, F_2, ...F_n)}_{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

דוגמה

חשב את הדיבגרנץ של $F = \left(x^2y, z, xyz\right)$

פתרון

$$\nabla \cdot f = \operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = \boxed{3xy}$$